



Ueber den Ansatz der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.

(Badener Monatshefte, 1859, November.)

Wenn Dank für die Auszeichnung, welche mir die Akademie durch die Aufnahme unter ihre Correspondenten hat zu Theil werden lassen, glaube ich am besten dadurch zu erkennen zu geben, dass ich vor der Hand durch erhaltenen Erlaubnis baldigst Gebrauch machen dem Fortschreiten einer Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen; ein Gegenstand, welcher durch das Interesse, welches Gauss und Dirichlet demselben längere Zeit gewidmet haben, einer solchen Untersuchung vielleicht nicht ganz unwohl erscheint.

Bei dieser Untersuchung denke mir als Ausgangspunkt die von Euler gemachte Bemerkung, dass das Product

$$\prod \frac{1}{1 - \frac{1}{p^n}} = \sum \frac{1}{n^s},$$

wenn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen gesetzt werden. Die Function der Complexen Veränderlichen s , welche durch diese beiden Ausdrücke, solange sie convergiren, dargestellt wird, bezeichne ich durch $\zeta(s)$. Beide convergiren nur, solange der reelle Theil von s grösser als 1 ist; es lässt sich indess leicht ein in der ganzen Ebene bestimmter Ausdruck der Function finden. Durch Anwendung der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx = \frac{\Gamma(s-1)}{n^s}$$

erhält man zunächst

$$\Gamma(s-1) \cdot \zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1}$$

Benutzt man nun das Integral

$$\int \frac{(-x)^{s-1} dx}{e^x - 1}$$

von x bis $+\infty$ pos., so um ein Grössengebiet erstreckt, welches der Werth 0, aber nicht an der Endesgrenze, welche die Function unter dem Integralzeichen im Fernem enthält, so ergibt sich dieses leicht gleich

$$(e^{-\pi si} - e^{\pi si}) \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1},$$

vorausgesetzt, dass es der vieldeutigen Function $(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$ der Logarithmus von $-x$ bestimmt worden ist, dass er für ein negatives x reell wird. Man

hes daher

$$\text{Lern 10. } \Pi(0-1) \cdot \zeta(s) = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x)^{s-1} dx}{e^x - 1},$$

das Integral in der eben angegebenen Bedeutung verstanden.

Diese Gleichung giebt nun den Wert der Function $\zeta(s)$ für jeden beliebigen complexen und reellen s , dass sie convergirt und für alle endlichen Werte von s , ausser 1, endlich ist, so wie auch, dass sie verschwindet, wenn s gleich einer negativen geraden Zahl ist.

Wenn der reelle Theil von s negativ ist, kann das Integral, statt positiv um das angegebene Gränzgebiet, auch negativ um das Gränzgebiet welches sämtliche übrigen complexen Grössen enthält erstreckt werden, da das Integral durch Werte mit unendlich grossem Modul dann unendlich klein ist. Für Zahlen dieses Gränzgebets aber wird die Function unter dem Integralzeichen unendlich, wenn x gleich einem geraden Vielfachen von $\pm 2\pi i$ wird und das Integral ist daher gleich der Summe der Residuen negativ um diese Werte gerichtet. Das Integral, um den Wert $n \cdot 2\pi i$ herum ist $= (-n \cdot 2\pi i)^{s-1} \cdot (-2\pi i)$, man erhält daher

$$\text{Lern 11. } \Pi(0-1) \cdot \zeta(s) = (2\pi)^s \sum n^{s-1} ((-i)^{s-1} + i^{s-1}),$$

also eine Relation zwischen $\zeta(s)$ und $\zeta(1-s)$, welche sich mit Benutzung bekannter Eigenschaften der Function Π auch so ausdrücken lässt:

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right) \cdot \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \zeta(s)$$

bleibt unverändert, wenn s in $1-s$ umgewandelt wird.

Diese Eigenschaft der Function veranlasste mich zu setz $\Pi(0-1)$ das Integral $\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)$ in dem allgemeinen Sinne der Reihe $\sum \frac{1}{n^s}$ auszudeuten, wodurch man eine sehr bequemere Ausdeutung der Function $\zeta(s)$ erhält. In der That hat man

$$\frac{1}{n^s} \Pi\left(\frac{s}{2}-1\right) \cdot \pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^{\infty} e^{-n\pi x} x^{\frac{s}{2}-1} dx,$$

$$\text{also, wenn man } \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\pi x} = \psi(x)$$

$$\text{setzt, } \Pi\left(\frac{s}{2}-1\right) \cdot \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \zeta(s) = \int_0^{\infty} \psi(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx,$$

$$\text{oder da } 2\psi(x) + 1 = x^{-\frac{1}{2}} (2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1), \quad (\text{Fuchs, Fund. S. 184})$$

$$\begin{aligned} \Pi\left(\frac{s}{2}-1\right) \cdot \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) &= \int_0^{\infty} \psi(x) \cdot x^{\frac{s}{2}-1} dx + \int_0^1 \psi\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x^{\frac{s}{2}-1} dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 (x^{\frac{s-3}{2}} - x^{\frac{s-1}{2}}) dx \\ &= \frac{1}{s(0-1)} + \int_1^{\infty} \psi(x) (x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}}) dx. \end{aligned}$$

Setzt man nun $s = \frac{1}{2} + ti$ und

$$\Pi\left(\frac{s}{2}\right) (s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \xi(t),$$

so dass

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - (t + \frac{1}{4}) \int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{2}} \cos(\frac{1}{2} t \log x) dx.$$

oder auch

$$\xi(t) = 4 \int_1^\infty \frac{d(x^{\frac{3}{2}} \psi(x))}{dx} x^{\frac{1}{2}} \cos(\frac{1}{2} t \log x) dx.$$

Diese Funktion ist für alle endlichen Werte von t endlich, und lässt sich nach Potenzen von t bis eine sehr schnell convergirende Reihe entwickeln. Da für einen Wert von s , dessen reeller Bestandteil größer als 1 ist, $\log \zeta(s) = -\sum \log(1-p^{-s})$ endlich bleibt und von der Logarithmenreihe des übrigen Faktors von $\xi(t)$ dasselbe gilt, so kann die Funktion $\xi(t)$ nur verschwinden, wenn der imaginäre Teil von t zwischen $\frac{1}{2}i$ und $-\frac{1}{2}i$ liegt. Die Anzahl der Wurzeln von $\xi(t) = 0$, deren reeller Teil zwischen 0 und T liegt, ist etwa $-\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$; das das Integral $\int_0^T \xi(t) dt$ positiv im der Teilgriff der Wurzel von t entspricht, deren imaginärer Teil zwischen $\frac{1}{2}i$ und $-\frac{1}{2}i$ und deren reeller Teil zwischen 0 und T liegt, ist (bis auf einen Bruchteil von der Ordnung der Größe $\frac{1}{T}$) gleich $(T \log \frac{T}{2\pi} - T)$; dieses Integral aber ist gleich der Anzahl der in dem Gebiet liegenden Wurzeln von $\xi(t) = 0$, multipliziert mit $2\pi i$. Man findet aus der That ohne so viel reelle Wurzeln innerhalb dieses Grenz, und es ist nicht wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind, dessen man allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe daher die Aufzählung derselben, nach einigen gleichartigen vorgebliebenen Versuchen vollständig bei Seite gelassen, da es für den nächsten Zweck meiner Untersuchung unbedeutend schien.

Bemerket man durch x jede Wurzel der Gleichung $\xi(x) = 0$, so kann man $\log \xi(t)$ durch

$$\sum \log(1 - \frac{t}{x}) + \log \xi(0)$$

ausdrücken; dass da die Divergenz der Wurzeln von der Größe t mit t nur wie $\log \frac{t}{2\pi}$ wächst, so convergirt dieser Ausdruck und wird für ein unendliches t nur unendlich wie $t \log t$; er überschreitet also von $\log \xi(t)$ um eine Funktion von t , die für ein unendliches t stetig und endlich bleibt und mit t dividirt für ein unendliches t unendlich klein wird. Dieser Unterschied ist folglich eine Constante, deren Wert durch Einsetzung von $t=0$ bestimmt werden kann.

Mit diesem Hilfsmittel lässt sich nun die Anzahl der Primzahlen, die kleiner als x sind, bestimmen.

Es sei $F(x)$, wenn x nicht gerade eines Primzahlgleich ist, gleich dieser Anzahl, was aber x eine Primzahl ist, um $\frac{1}{2}$ größer, so dass für ein x , bei welchem $F(x)$ eine Sprungweise ändert,

4

$$F(x) = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}$$

Erstmal was man so
 $\log \zeta(s) = -\sum \log(1-p^{-s}) = \sum p^{-s} + \frac{1}{2} \sum p^{-2s} + \frac{1}{3} \sum p^{-3s} + \dots$
 p^{-s} durch $\int_p^\infty x^{-s-1} dx$, p^{-2s} durch $\int_{p^2}^\infty x^{-s-1} dx$, ..., so erhält
 man $\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_1^\infty f(x) x^{-s-1} dx$,

wo man $F(x) + \frac{1}{2} F(x^2) + \frac{1}{3} F(x^3) + \dots$
 durch $f(x)$ bezeichnet.

Diese Gleichung ist gültig für jeden complexen Werth
 $a+bi$ von s , wenn $a > 1$. Wenn aber in diesem Umfange die
 Gleichung $g(s) = \int_0^\infty h(x) x^{-s} dx$
 gilt, so kann man mit Hilfe des Fourier'schen Satzes die Fun-
 ction h durch die Function g ausdrücken. Die Gleichung erfüllt
 wenn $h(x)$ reell ist und

$$g(a+bi) = g_1(b) + i g_2(b),$$

so die beiden folgenden

$$g_1(b) = \int_0^\infty h(x) x^{-a} \cos(b \log x) dx,$$

$$i g_2(b) = -i \int_0^\infty h(x) x^{-a} \sin(b \log x) dx.$$

Wenn man beide Gleichungen mit $(\cos(b \log y) + i \sin(b \log y)) dy$
 multiplicirt und von $-\infty$ bis $+\infty$ integriert, so erhält man
 in beiden auf der rechten Seite nach dem Fourier'schen
 Satze $\pi h(y) y^{-a}$, also, wenn man beide Gleichungen addirt und
 mit y^a multiplicirt, so ist

$$2\pi i h(y) = \int_{a-\pi i}^{a+\pi i} g(s) y^s ds,$$

wo die Integration so ausgeführt ist, dass der reelle Theil
 von s constant bleibt.

Das Integral stellt für einen Werth von y , bei welchem eine Sprun-
 gweise Änderung der Function $h(y)$ stattfindet, die Mittelwerthe aus
 den Werten der Function h zu beiden Seiten der Sprünge dar. Bei
 der hier vorausgesetzten Bestimmungsweise der Function $f(x)$
 besitzt dieselbe denselbe Eigenschaft, und man hat daher völlig allgemein

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\pi i}^{a+\pi i} \frac{\log \zeta(s)}{s} y^s ds.$$

Für $\log \zeta$, kann man nun die früher gefundenen Ausdrücke

$$\frac{1}{2} \log x - \log(s-1) - \log \pi \frac{1}{2} + \log \left(1 + \frac{(s-\frac{1}{2})^2}{x}\right) + \log \xi(s)$$

substituiren; die Integrale der einzelnen Glieder dieser Ausdrücke
 würden aber durch das Unendliche angedeutet nicht convergiren, wes-
 halb es zweckmäßiger ist, die Gleichung vorher durch partielle Integration

$$\text{Aus } f(x) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-\pi i}^{a+\pi i} \frac{d \log \zeta(s)}{ds} x^s ds$$

umzuformen.

$$\text{Da } -\log \pi \frac{1}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^{m-1} \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2} \log m \right), \text{ für } m = \infty,$$

$$\text{also } -\frac{d}{ds} \log \pi \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \frac{d}{ds} \log \left(1 + \frac{1}{2^m}\right),$$

so stellen diese reellen Glieder der Ausdrücke für $f(x)$ mit
 Ausschluß von

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-\pi i}^{a+\pi i} \frac{1}{s} \log \xi(s) x^s ds = \log \xi(s)$$

die Form
$$\pm \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d\left(\frac{1}{s} \log\left(1 - \frac{x}{\beta}\right)\right)}{ds} x^s ds.$$

Nun ist aber

$$\frac{d\left(\frac{1}{s} \log\left(1 - \frac{x}{\beta}\right)\right)}{ds} = \frac{1}{(\beta - s)\beta}$$

und, wenn der reelle Teil von s grösser als der reelle Teil von β ist,

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^s ds}{(\beta - s)\beta} = \frac{x^\beta}{\beta} = \int_{\infty}^x x^{\beta-1} dx,$$

$$\text{oder} = \int_0^x x^{\beta-1} dx,$$

je nachdem der reelle Teil von β negativ oder positiv ist. Man hat daher

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d\left(\frac{1}{s} \log\left(1 - \frac{x}{\beta}\right)\right)}{ds} x^s ds$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{s} \log\left(1 - \frac{x}{\beta}\right) x^s ds$$

$$= \int_{\infty}^x \frac{x^{\beta-1}}{\log x} dx + \text{const. im ersten Falle}$$

$$\text{und} = \int_0^x \frac{x^{\beta-1}}{\log x} dx + \text{const. im zweiten Falle}$$

Im ersten Falle bestimmt sich die Integrationsconstante, wenn man den reellen Teil von β negativ unendlich werden lässt; im zweiten Falle erhält das Integral von 0 bis x um zwei verschiedene Werte, je nachdem die Integration durch complexe Werthe mit positivem oder negativem Arcus geschieht, und wird, auf jenem Wege genommen, unendlich klein, wenn der Coefficient von x dem Werthe von β positiv unendlich wird, auf letzterem aber, wenn dieser Coefficient unendlich unendlich wird. Hieraus ergibt sich, wie auf der letzten Seite $\log\left(1 - \frac{x}{\beta}\right)$ zu bestimmen ist, damit die Integrationsconstante wegfällt.

Durch Einsetzung dieses Wertes in den Ausdruck von $f(x)$ erhält man

$$f(x) = \text{Li}(x) - \sum^{\alpha} \left(\text{Li}\left(x^{\frac{1}{2} + \alpha i}\right) + \text{Li}\left(x^{\frac{1}{2} - \alpha i}\right) \right) + \int_x^{\infty} \frac{1}{x^z - 1} \frac{dx}{x \log x} + \log \xi(0),$$

wobei \sum^{α} für α sämmtliche positive (oder einen positiven reellen Teil enthaltende) Wurzeln der Gleichung $\xi(\alpha) = 0$, einer Größe nach geordnet, gesetzt werden. Es lässt sich, mit Hilfe einer genaueren Discussion der Function ξ , leicht zeigen, dass bei dieser Anordnung die Werte der Reihe

$$\sum \left(\text{Li}\left(x^{\frac{1}{2} + \alpha i}\right) + \text{Li}\left(x^{\frac{1}{2} - \alpha i}\right) \right) \log x$$

mit dem Grenzwert $\log x$, gegen welchen

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-bi}^{a+bi} \frac{d\left(\frac{1}{s} \sum \log\left(1 + \frac{(x-\frac{1}{2})^s}{\alpha^2}\right)\right)}{ds} x^s ds$$

bei unauflösendem Wachsen der Grösse b convergirt, übereinstimmt; durch veränderte Anordnung aber würde sie je des beliebigen reellen Wertes annehmen können.

Aus $f(x)$ findet sich $F(x)$ mittelst der durch Umkehrung der Relation

$$f(x) = \sum \frac{1}{n} F\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

resultirenden Gleichung

$$F(x) = \sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right),$$

wobei für n der Reihe nach dreierlei Quadrate ausser 1 erlaubtes Zahlen ν setzen wird und μ der Anzahl der Primfactoren von n bezeichnet.

Betrachtet man \sum^{α} auf eine endliche Zahl von Gliedern, so gibt die Derivirte des Ausdrucks für $f(x)$ aber, bis auf

was mit wachsendem x sehr schnell abnehmenden Theil,

$$\frac{1}{\log x} - 2 \sum^{\infty} \frac{\cos(x \log x) x^{-\frac{1}{2}}}{\log x}$$

einen erweiterten Ausdruck für die Dichtigkeit der Primzahlen + der halben Dichtigkeit der Primzahlenquadrate + $\frac{1}{3}$ von der Dichtigkeit der Primzahlen u.s.w. von der Grösse x .

Die bekannte Näherungsformel $F(x) = Li(x)$ ist also nur bis auf Größen von der Ordnung $x^{\frac{1}{2}}$ richtig und gibt es aber etwas zu grossen Werth; denn die nicht periodischen Glieder in dem Ausdrucke von $F(x)$ sind, von Größen, die mit x nicht so schnell wachsen, abgesehen:

$$Li(x) - \frac{1}{2} Li(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3} Li(x^{\frac{1}{3}}) - \frac{1}{5} Li(x^{\frac{1}{5}}) + \frac{1}{6} Li(x^{\frac{1}{6}}) - \frac{1}{7} Li(x^{\frac{1}{7}}) + \dots$$

In der That hat sich bei der von Gauss und Goldschmidt vorgenommenen und bis zu $x =$ drei Millionen fortgeführten Verfolgung von $Li(x)$ mit der Anzahl der Primzahlen unter x diese Anzahl schon vom ersten Hunderttausend an stark abwärts als $Li(x)$ ergeben, und zwar wächst die Differenz unter manchen Schwankungen allmählich mit x . Aber auch die von den periodischen Gliedern abhängige Stelleweise Verkürzung und Verkürzung der Primzahlen hat schon bei der Zählung die Differenz ausser Acht gelassen, ohne dass jedoch hierzu eine Gesetzmässigkeit bemerkt worden wäre. Bisherige Versuche neue Zählung würde es interessant sein, den Einfluss der etwylas in den Ausdruck für die Dichtigkeit der Primzahlen erhaltenen periodischen Glieder zu verfolgen. Ein regelmässiger Gang als $F(x)$ würde die Function $f(x)$ zeigen, welche sich schon im ersten Hundert sehr deutlich als mit $Li(x) + \log \xi(x)$ im Mittel übereinstimmend erkennen lässt.